REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	
Concours d'aptitude au professorat de l'enseignement secondaire	
EPREUVE : SESSION DE JUILLET 2001	
EPREUVE : MATHEMATIQUE	**DUREE:** 4 heures

Exercice 1.

Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]0, \infty[$ par

$$H(t) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+t)}}$$

1) Montrer que H est décroissante et convexe sur l'intervalle $]0, \infty[$.

2) Partant de l'identité

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad , \quad a > 0$$

calculer $H(1)$, $H'(1)$ et $H''(1)$.

3) Déterminer les limites de H aux bords de l'intervalle de définition.

Exercice 2

Soit q et g deux fonctions réelles et continues sur l'intervalle $[0, 1]$ et considérons l'équation différentielle

$$-y'' + q\,y = g \quad , \quad y(0) = a \, , \; y(1) = b \qquad \text{(E)}$$

où a et b sont deux réels quelconques.

Première question.

On suppose dans cette question que la fonction q est positive ou nulle sur $[0, 1]$.

1) Soit z une fonction vérifiant $-z'' + qz = 0$. Montrer que la fonction z^2 est convexe et en déduire que si $z(0) = z(1) = 0$, alors z est identiquement nulle.

2) Montrer que l'équation (E) admet au plus une solution.

3) Soit u et v deux fonctions vérifiant

$$-u'' + qu = 0 \quad , \quad u(0) = 0 \quad , \quad u'(0) = 1$$
$$-v'' + qv = g \quad , \quad v(0) = a \quad , \quad v'(0) = 0$$

Justifier l'existence de ces deux fonctions et en déduire que l'équation (E) admet une solution de la forme $v + \alpha u$ où α est une constante que l'on déterminera.

Deuxième question.

On suppose qu'il existe une fonction h strictement positive, de classe C^2 et vérifiant

$$-h'' + qh \geq 0 \quad , \quad \int_0^1 h^{-2}(x)dx = 1$$

4) Montrer que $k(t) = \int_0^t h^{-2}(x)dx$ réalise un difféomorphisme de $[0, 1]$ sur lui-même.
5) On suppose que y est une solution de (E) et on définit la fonction z par

$$y(t) = h(t)\, z(\, k(t)\,)\quad ,0 \leq t \leq 1$$

Ecrire une équation différentielle vérifiée par z.
6) Montrer que l'équation (E) possède une unique solution.
Troisième question
On suppose que la fonction q vérifie $q(t) \geq -m^2 > -\pi^2$.
7) Déterminer le signe de $-l'' + ql$ lorsque $l(t) = \cos(\, m(t - \frac{1}{2})\,)$.
8)) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution.
Quatrième question.
Pour quelles valeurs de la constante c l'équation

$$-y'' + cy = 0\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y(1) = 1$$

possède-t-elle une solution ?

Exercice 3

On considère la fonction périodique $K : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de période 1 définie par

$$K(x) = x \text{ si } 0 \leq x \leq 1/2 \text{ et } K(x) = 1 - x \text{ si } 1/2 \leq x \leq 1$$

et on pose

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} K(2^k x)\quad ,\quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} K(2^k x)$$

1) Tracer proprement le graphe de la fonction g_3 sur l'intervalle $[0, 1]$.
2) Montrer que, pour tout entier i dans $\mathbf{Z}$, la fonction g_n est affine sur l'intervalle $[i2^{-n}, (i + 1)2^{-n}]$.
3) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbf{R}$, qu'elle est périodique de période 1 et qu'elle vérifie $g(x) = g(1 - x)$ pour tout x dans $\mathbf{R}$.
4) Montrer que la fonction g vérifie les relations

$$g(x) = g_n(x) + \frac{1}{2^n}\, g(2^n x)$$

5) En déduire que $g(1/3) = 2/3$.
6) Calculer de même $g(a/5)$ pour $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

On se propose maintenant de montrer que la fonction continue g n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$. On se donne un point x_0 dans $\mathbf{R}$, un entier n et on considère le point $x_1 = i2^{-n}$ où i est le plus petit entier dans $\mathbf{Z}$ qui vérifie $i2^{-n} \geq x_0$. On pose $x_2 = x_1 + 2^{-n}/3$, $x_3 = (i + 1)2^{-n}$ et on désigne par h l'application affine qui coïncide avec g_n sur l'intervalle $[x_1, x_3]$.